XXXIII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2011 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. En el pizarrón está escrito un entero $N > 1$. A partir de este número, Alex escribe una sucesión de enteros positivos de la siguiente manera: elige un divisor mayor que 1 del último número escrito, y o bien se lo suma a éste y escribe el resultado o bien se lo resta a éste y escribe el resultado. Determinar si siempre es posible (para todo $N > 1$) para Alex escribir, en algún momento, el número 2011. 3 PUNTOS

2. Sea ABC un triángulo y P el punto del lado AB tal que $AP = 2PB$. Se sabe que $CP = 2PQ$, donde Q es el punto medio de AC. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo. 4 PUNTOS

3. Se tiene una balanza de platos y un conjunto de pesas distintas entre si. Se sabe que para cualesquiera dos pesas de este conjunto que se coloquen en el plato izquierdo, uno puede equilibrar la balanza colocando una o varias de las restantes pesas en el plato derecho. Determinar el menor número posible de pesas que puede tener el conjunto. 5 PUNTOS

4. Un tablero tiene 2012 filas y $k > 2$ columnas. Un ficha se ubica en una casilla de la primera columna de la izquierda. Dos jugadores mueven por turnos. En cada movida, el jugador mueve la ficha una casilla hacia la derecha o hacia arriba o hacia abajo de modo que la casilla de llegada no haya sido ocupada por la ficha con anterioridad. El juego termina cuando cualquiera de los jugadores mueve la ficha hasta una casilla de la última columna de la derecha. Sin embargo, qué jugador gana o pierde sólo se informa en el momento en el que la ficha ocupa por primera vez una casilla de la anteúltima columna (la segunda columna de la derecha). ¿Puede alguno de los dos jugadores asegurarse la victoria? 6 PUNTOS

5. Se sabe que $0 < a,b,c,d < 1$ y $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Demostrar que

$$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d) \geq 1.$$

6 PUNTOS

6. Un auto viaja por una autopista recta a 60 kilómetros por hora. Al lado de la autopista hay un muro de 100 metros de largo, paralelo a la autopista. Cada segundo, el pasajero del auto mide el ángulo de visión del muro. Demostrar que la suma de todos los ángulos que ha medido es menor que 1100 grados. 7 PUNTOS

7. Los vértices de un polígono regular de 45 lados están pintados de tres colores, con 15 vértices de cada color. Demostrar que se pueden elegir tres vértices de cada color de manera que los tres triángulos que tienen sus vértices entre los elegidos y del mismo color sean iguales 9 PUNTOS

XXXIII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2011 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Pedro marca más de dos puntos en el plano de modo que todas las distancias entre puntos marcados sean distintas. Un par de puntos marcados *A*; *B* se llama *inusual* si *A* es el punto marcado más alejado de *B*, y *B* es el punto marcado más próximo a *A* (aparte del propio *A*). ¿Cuál es el mayor número de pares de puntos inusuales que puede obtener Pedro?
4 PUNTOS

2. Se sabe que $0 < a, b, c, d < 1$ y $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Demostrar que
$$(a+b+c+d)-(a+c)(b+d) \geq 1.$$
4 PUNTOS

3. Sea *ABC* un triángulo, A_1, B_1, C_1 los pies de sus alturas trazadas desde los vértices *A*, *B*, *C*, y los puntos C_A, C_B son las proyecciones de C_1 sobre *AC* y *BC* respectivamente. Demostrar que la recta $C_A C_B$ corta por la mitad a cada uno de los segmentos C_1A_1 y C_1B_1. 5 PUNTOS

4. Determinar si existe un polígono convexo de *N* lados tal que todos sus lados sean iguales y todos sus vértices pertenezcan a la parábola $y = x^2$ para

a) *N* = 2011; 3 PUNTOS

b) *N* = 2012. 4 PUNTOS

5. Diremos que un entero positivo es *bueno* si todos sus dígitos son distintos de cero. Un entero bueno se llama *especial* si tiene al menos *k* dígitos y sus valores crecen estrictamente de izquierda a derecha.
Dado un entero bueno, en cada movida es posible o bien agregar algún entero especial a su expresión por la izquierda, o bien agregarlo por la derecha, o bien insertar un entero especial entre cualesquiera dos de sus dígitos, o bien suprimir una secuencia de dígitos que sea un entero especial. Hallar el mayor valor de *k* tal que cualquier entero bueno se pueda transformar en cualquier otro entero bueno mediante las operaciones descriptas.
7 PUNTOS

6. Demostrar que para todo *n* > 1, el entero $1^1 + 3^3 + 5^5 + ... + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ es múltiplo de 2^n pero no es múltiplo de 2^{n+1}. (La suma tiene a todos los enteros impares *k* desde 1 hasta $2^n - 1$, elevados a la *k*). 7 PUNTOS

7. Una circunferencia azul está dividida en 100 arcos mediante 100 puntos rojos. Las longitudes de los arcos son todos los enteros de 1 a 100 en un orden arbitrario. Demostrar que existen dos cuerdas con extremos rojos que son perpendiculares. 9 PUNTOS